

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева»
(Самарский университет)

Институт ракетно-космической техники

Кафедра теоретической механики

РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовому проекту по дисциплине «Теоретическая механика»
«ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТОЧКИ И МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ»

Выполнил:

студент группы 1204-150303D

Тузина А.А.

Руководитель проекта: Ледков А.С.

САМАРА 2020

РАСЧЕТНАЯ СХЕМА И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

На рисунке 1 изображена механическая система, которая состоит из однородной пластины в форме прямоугольного треугольника и трубки длины R , закрепленной на его её верхнем катете. По трубке движется шарик, к одному из его концов прикреплена пружина. Длина пружины в недеформированном состоянии равна l_0 . Размер $l=5l_0$. Масса шарика m , масса трубки $M=4m$. В начальный момент времени система покоилась, причем пластина и материальная точка занимали такое положение, при котором $\varphi=\varphi_0$, $x=x_0$. Система вращается с угловой скоростью ω .

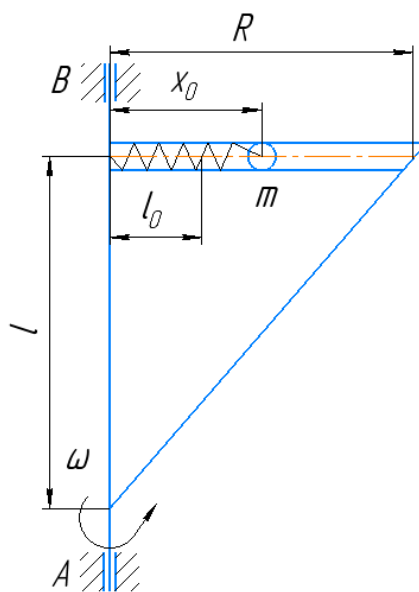


Рисунок 1 – Расчетная схема

Таблица 1- Исходные данные.

Форма тела	Однородная треугольная пластина		
Масса тела 1	M	кг	12
Масса материальной точки 2	m	кг	3
Размеры тела	l	м	5
	R	м	3
Обобщенные координаты	Обозначения		Начальные значения для I этапа
	$q_1 = \varphi$	рад	$\varphi_0 = 0$
	$q_2 = x$	м	$x_0 = 1,5$
Жесткость пружины	c	Н/м	120
Угловая скорость тела 1	ω	рад/с	2
Момент окончания движения	t_1	с	5
Длина пружины в недеформированном состоянии	l_0	м	1

РЕФЕРАТ

Пояснительная записка: 34 страниц, 25 рисунков, 2 таблицы.

МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА, МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА, ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ, АКТИВНЫЕ СИЛЫ, ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ, КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ, ВРАЩАТЕЛЬНЫЙ МОМЕНТ.

Объектом исследования является механическая система, которая включает в себя однородную треугольную пластину, и шарик, перемещающийся вдоль верхнего катета и прикреплённый на пружине к одному из её концов. Механическая система совершает вращательное движение вокруг опоры.

Целью работы является исследование движения механической системы, отработка навыков применения методов и приемов теоретической механики к решению профессиональных задач в рамках специальности.

Составлено и проинтегрировано дифференциальное уравнение относительного движения материальной точки. По теореме об изменении кинетического момента найден момент, обеспечивающий вращение с постоянной угловой скоростью. Методом кинетостатики найдены реакции опор. Составлены и численно проинтегрированы дифференциальные уравнения движения механической системы на основе уравнений Лагранжа. Произведено исследование на положения равновесия и выполнена проверка по критерию Сильвестра. Исследованы малые колебания механической системы.

Работа носит учебный характер. Ее результаты не имеют большой практической ценности, но могут быть частично использованы при выполнении дипломных проектов и учебных заданий на старших курсах.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1 ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ	7
2 ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К АНАЛИЗУ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	16
3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В ОПОРАХ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА	20
4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ	23
5 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ	29
6 ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	33
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	34

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика является важнейшей составляющей подготовки инженера в области ракетно-космической техники, и в инженерной практике весьма распространены задачи на исследование движения механических систем.

В первом разделе проводится исследование относительного движения материальной точки.

Во втором разделе выполняется аналитическое и численное решение дифференциального уравнения. По теореме об изменении кинетического момента находится уравнение движения механической системы без ограничений на угловую скорость.

В третьем разделе при помощи метода кинестатики находятся реакции опор.

В четвертом разделе с помощью уравнений Лагранжа второго рода составлены уравнения движения механической системы с двумя степенями свободы. Проводится проверка правильности результатов, полученных в первом разделе.

В пятом разделе выполняется исследование положений равновесия на устойчивость с использованием критерия Сильвестра.

В шестом разделе проводится исследование колебаний системы около устойчивого положения равновесия и составляются уравнения малых колебаний системы.

1 ИССЛЕДОВАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Свяжем подвижную систему отсчета $Ox_1y_1z_1$ с вращающимся телом, выбрав за начало координат точку O , где находится опора. Ось Ox_1 направим параллельно направляющей вправо, ось Oy_1 направим перпендикулярно оси Ox_1 вправо. Ось Oz_1 проведём так, чтобы Ox_1 , Oy_1 и Oz_1 образовали правую тройку векторов, т.е. вверх.

Рассмотрим механическую систему, изображенную на рисунке 2. Движение материальной точки в подвижной системе отсчета описывается дифференциальным уравнением относительного движения.

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \quad (1)$$

где \bar{F} – главный вектор сил, приложенных к шарик; \bar{R} – главный вектор реакций связей; $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ и $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ – переносная и кориолисова сила инерции.

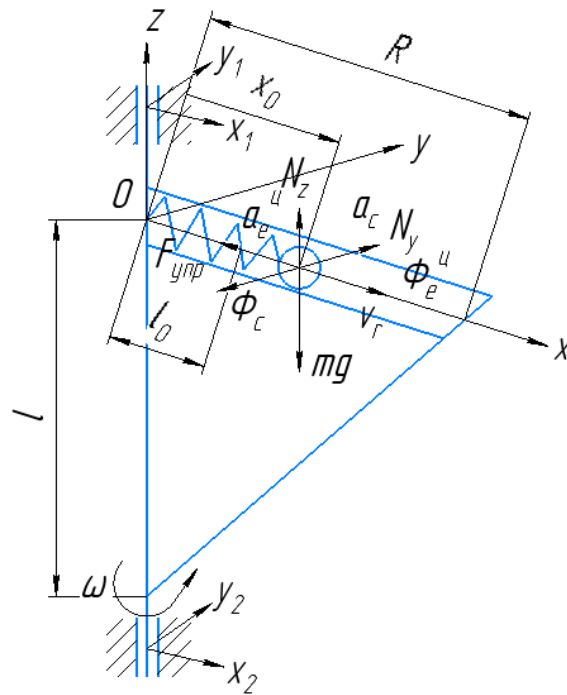


Рисунок 2 – Механическая система и действующие на шарик силы.

Вращение вместе с системой координат $Ox_1y_1z_1$ является переносным движением для шарика, относительное движение – движение шарика по направляющей из двух полок стержня.

Уравнение относительного движения для рассматриваемого случая равномерного вращения стержня имеет вид:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_{упр} + \bar{\Phi}_e^y + \bar{\Phi}_c, \quad (2)$$

где \bar{a}_r – ускорение шарика в подвижной системе отсчёта; $m\bar{g}$ – сила тяжести, действующая на шарик; \bar{N} – нормальная реакция полки стержня; $\bar{F}_{упр}$ – сила упругости

пружины, модуль которой пропорционален величине деформации, $\overline{F}_{\text{упр}} = c \cdot \Delta = -c(x - l_0)$; $\overline{\Phi}_e^{\text{ц}}$ и $\overline{\Phi}_c$ - переносная центробежная и кориолисова силы инерции.

Переносная вращательная сила инерции отсутствует, так как движение происходит с постоянной угловой скоростью.

Силы инерции $\overline{\Phi}_e^{\text{ц}}$ и $\overline{\Phi}_c$ направлены противоположно переносному центростремительному $\overline{a}_e^{\text{ц}}$ и кориолисову ускорению \overline{a}_c соответственно. Направление ускорения \overline{a}_c можно определить по правилу Жуковского: через точку проводим плоскость перпендикулярно оси вращения, относительную скорость \overline{V}_r проецируем в эту плоскость и поворачиваем на 90° по направлению переносного вращения, предполагая, что относительная скорость $\overline{V}_r = \dot{x}$ шарика положительна. В нашем случае $\overline{\Phi}_c$ направлена против оси Oy подвижной системы координат (рисунок 2).

Модуль центробежной силы инерции определяется по формуле

$$\Phi_e^{\text{ц}} = m \cdot a_e^{\text{ц}},$$

где $a_e^{\text{ц}} = \omega^2 \cdot x$ – центробежное ускорение.

Модуль кориолисовой силы инерции определяется по формуле

$$\Phi_c = m \cdot a_c,$$

где $a_c = 2 \cdot \omega \cdot V_r$, - кориолисово ускорение, в котором $V_r = \dot{x}$ – относительная скорость шарика.

$$\varphi = \omega \cdot t.$$

Спроецируем векторное уравнение относительного движения шарика на ось X подвижной системы координат Oxy .

$$m\ddot{x} = -\overline{F}_{\text{упр}} + \Phi_e^{\text{ц}}.$$

Подставим выражения $\overline{F}_{\text{упр}}$, $\Phi_e^{\text{ц}}$, φ и получим:

$$m\ddot{x} = -c(x - l_0) + m\omega^2 x.$$

Разделим обе части уравнения на m :

$$\ddot{x} = -\frac{c}{m}(x - l_0) + \omega^2 x.$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение:

$$\ddot{x} + x \left(\frac{c}{m} - \omega^2 \right) = \frac{c}{m} l_0. \quad (3)$$

Решение полученного линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (3) имеет вид:

$$x = \overline{x} + \tilde{x}. \quad (4)$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Здесь \overline{x} – общее решение, \tilde{x} – частное решение.

Найдём общее решение. Для этого представим уравнение в виде:

$$\ddot{x} + x \cdot \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = 0.$$

Выполним решение этого уравнения:

$$\lambda^2 = -\left(\frac{c}{m} - \omega^2\right); \quad \frac{c}{m} - \omega^2 > 0;$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \cdot i; \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \cdot i;$$

Запишем общее решение:

$$\bar{x} = C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \cdot t\right);$$

Найдём частное решение уравнения:

$$\ddot{\tilde{x}} + \tilde{x} \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = \frac{c}{m} l_0;$$

$$\tilde{x} = A; \quad \dot{\tilde{x}} = 0; \quad \ddot{\tilde{x}} = 0;$$

$$0 + A \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right) = \frac{c}{m} l_0;$$

$$\tilde{x} = A = \frac{\frac{c}{m} l_0}{\frac{c}{m} - \omega^2} = \frac{c l_0}{c - \omega^2 m}.$$

Запишем решение уравнения, просуммировав полученные результаты для общего и частного решений по формуле (4):

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} t\right) + \frac{c l_0}{c - \omega^2 m};$$

$$\dot{x} = -C_1 \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} t\right) + C_2 \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} t\right).$$

Найдём постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Так как в начальный момент времени $t=0$ шарик покоился в трубке на расстоянии x_0 и полагая $\varphi_0=0$, приведём выкладки:

$$x_0 = C_1 + \frac{c l_0}{c - \omega^2 m}; \quad C_1 = x_0 - \frac{c l_0}{c - \omega^2 m};$$

$$0 = C_2 \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2}; \quad C_2 = 0.$$

Окончательное решение дифференциального уравнения принимает вид:

$$x = \left(x_0 - \frac{c l_0}{c - \omega^2 m}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} t\right) + \frac{c l_0}{c - \omega^2 m}.$$

Подставим числа, получим:

$$x(t) = 0,072 \sin 9,747t - 0,132 \cos 9,747t - 0,072 \sin 5t + 0,632.$$

Скорость этого движения равна:

$$v(t) = -\left(x_0 - \frac{cl_0}{c - \omega^2 m}\right) \sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{m} - \omega^2} t\right).$$

Подставим числа, получим:

$$v(t) = 0,701 \sin 9,747t - 0,701 \cos 5t + 1,282 \sin 9,747t;$$

Спроецируем уравнение (2) на ось Oy. Шарик не перемещается вдоль оси y.

Следовательно, $\ddot{y} = 0$.

$$N_y - \Phi_c = 0,$$

где $\Phi_c = 2m\omega V_r$. Тогда $N_y = 2m\omega V_r$.

Спроецируем уравнение (2) на ось Oz.

$$N_z - mg = 0.$$

Тогда $N_z = mg$.

Суммарную реакции трубки найдем по формуле

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2}.$$

Для проверки правильности аналитического решения уравнения относительного движения материальной точки выполним численное интегрирование с помощью MathCad и приведём результаты на рисунках 3-6.

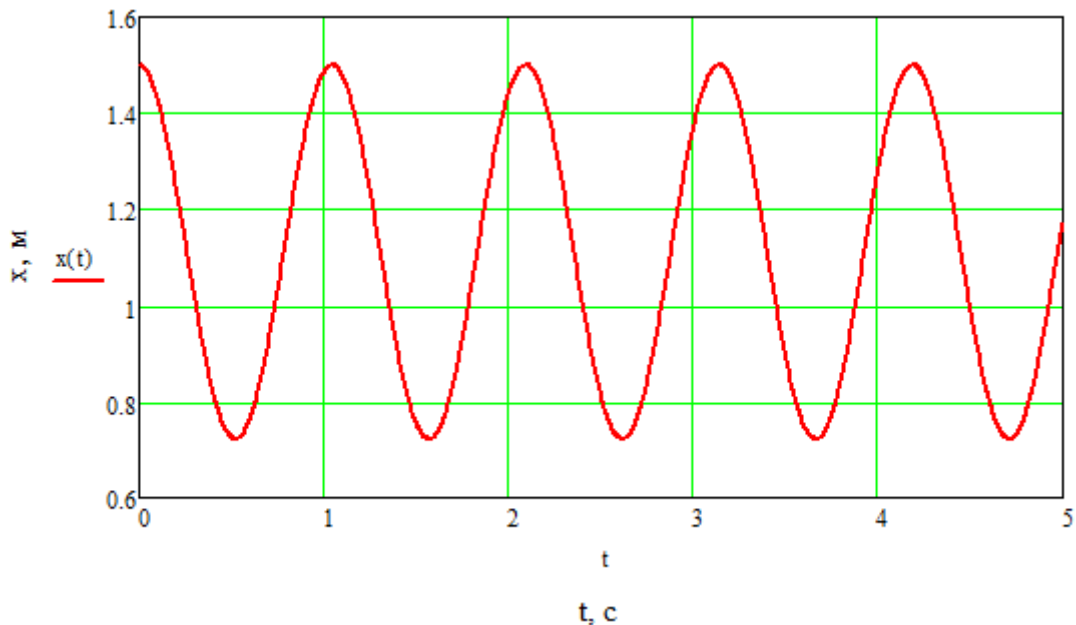


Рисунок 3 – Зависимость перемещения шарика от времени (аналитически).

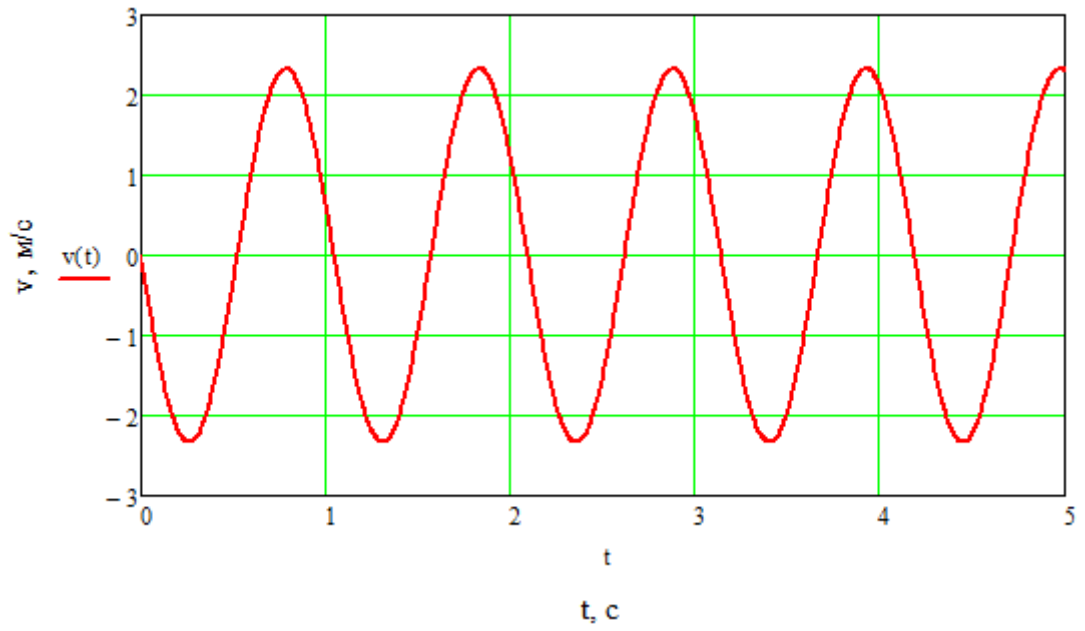


Рисунок 4 – Зависимость скорости шарика от времени (аналитически).

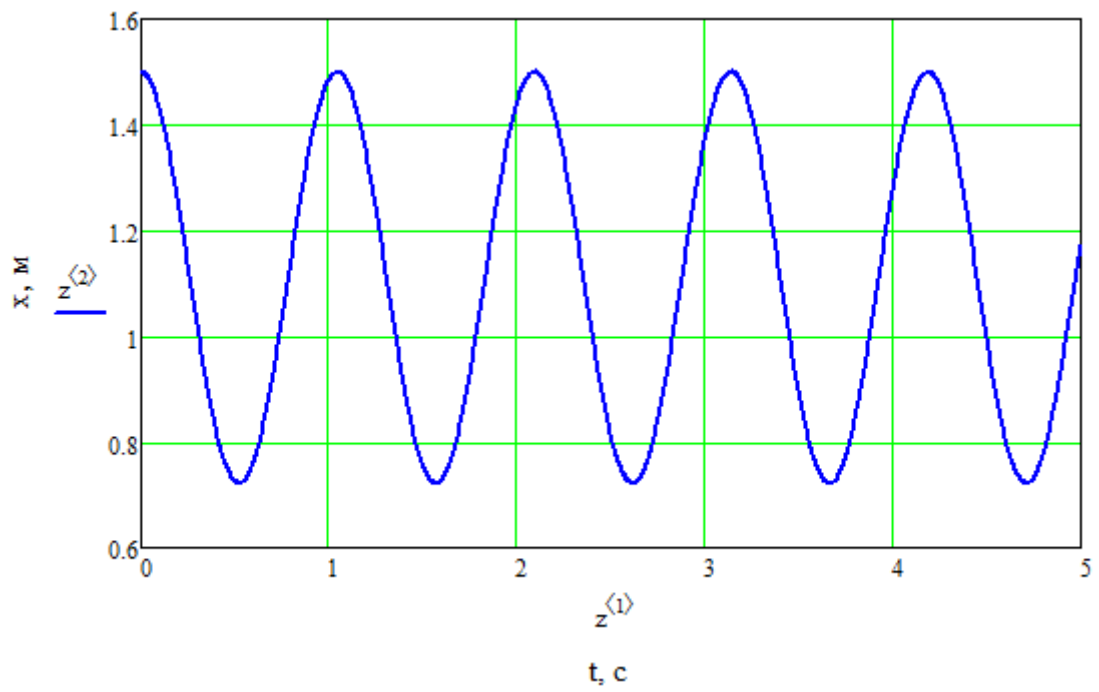


Рисунок 5 – Зависимость перемещения шарика от времени (численно).

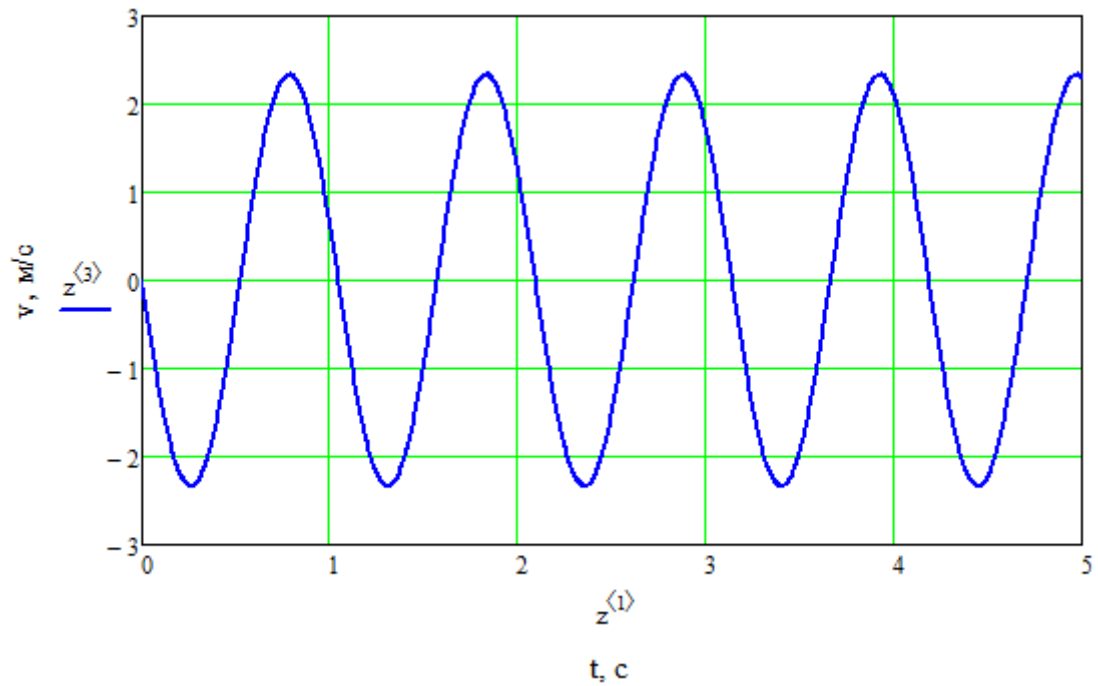


Рисунок 6 – Зависимость скорости шарика от времени (численно).

Анализируя полученные результаты, видим, что графики получились одинаковые, откуда следует, что дифференциальные уравнения решены верно. Построим график зависимости силы реакции направляющей от времени (рисунок 7) и фазовый портрет системы (рисунок 8).

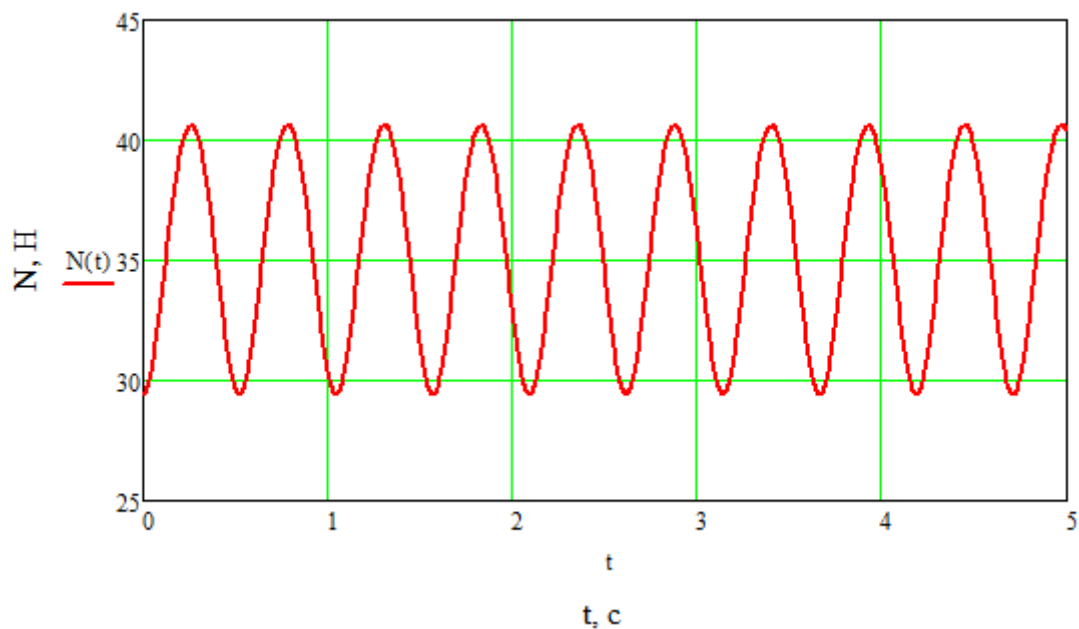


Рисунок 7 – Зависимость силы реакции направляющей от времени.

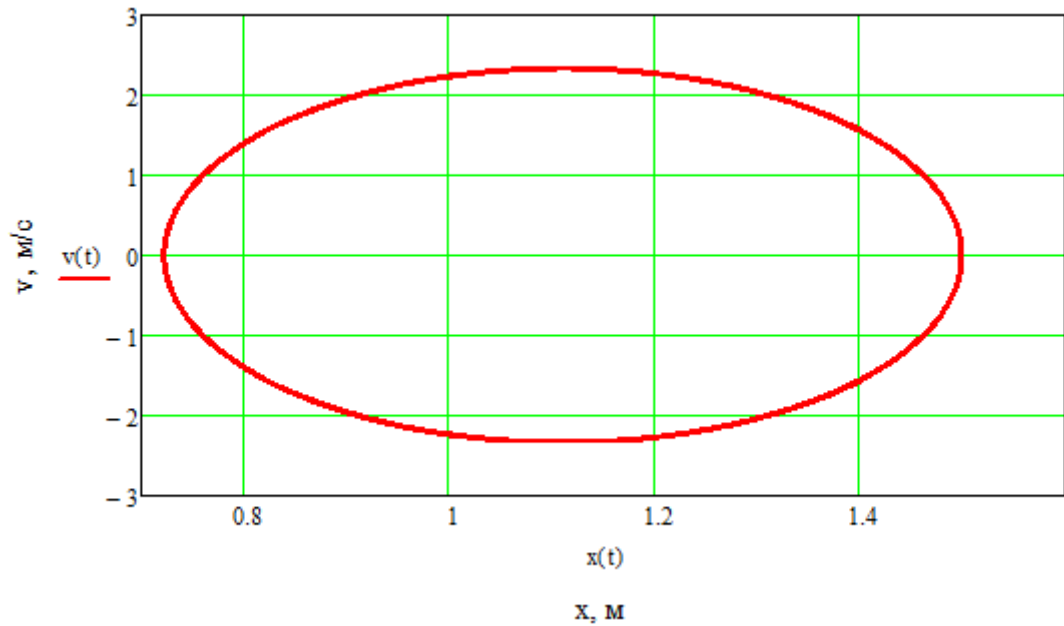


Рисунок 8 – Фазовый портрет системы.

Определим граничные значения жёсткости c_1 и c_2 . Значение c_1 отделяет колебательное движение шарика от экспоненциального, а при c_2 шарик всё ещё не вылетает за пределы направляющей. Методом подбора получили: $c_1 = 12 \text{ Н/м}$. (рисунок 9-10), $c_2 = 22 \text{ Н/м}$ (рисунок 11-12).

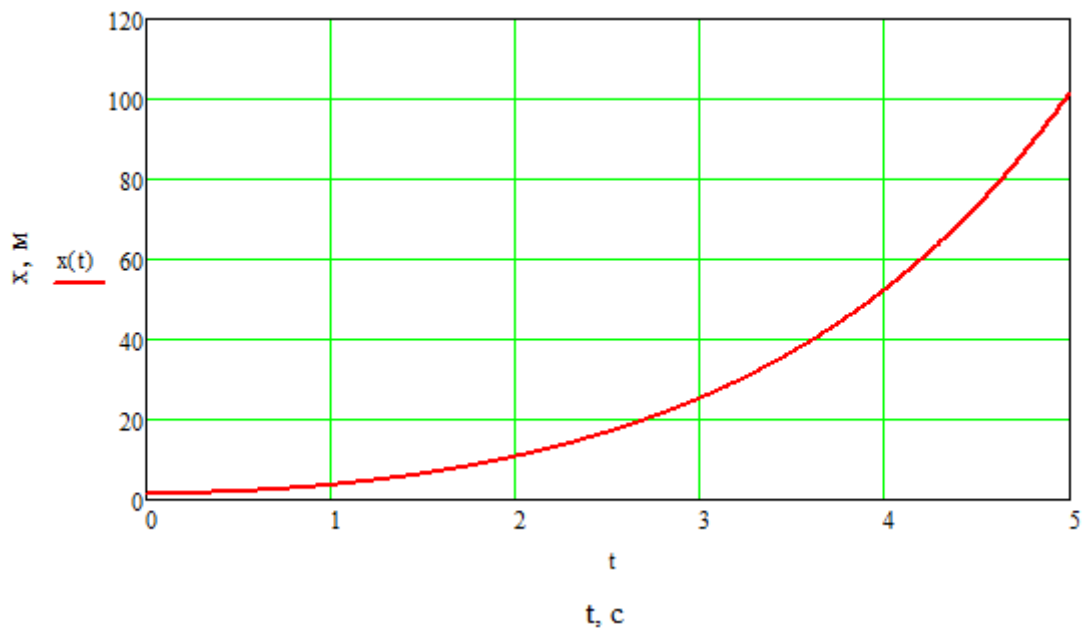


Рисунок 9 – Зависимость перемещения шарика от времени при $c=11 \text{ Н/м}$.

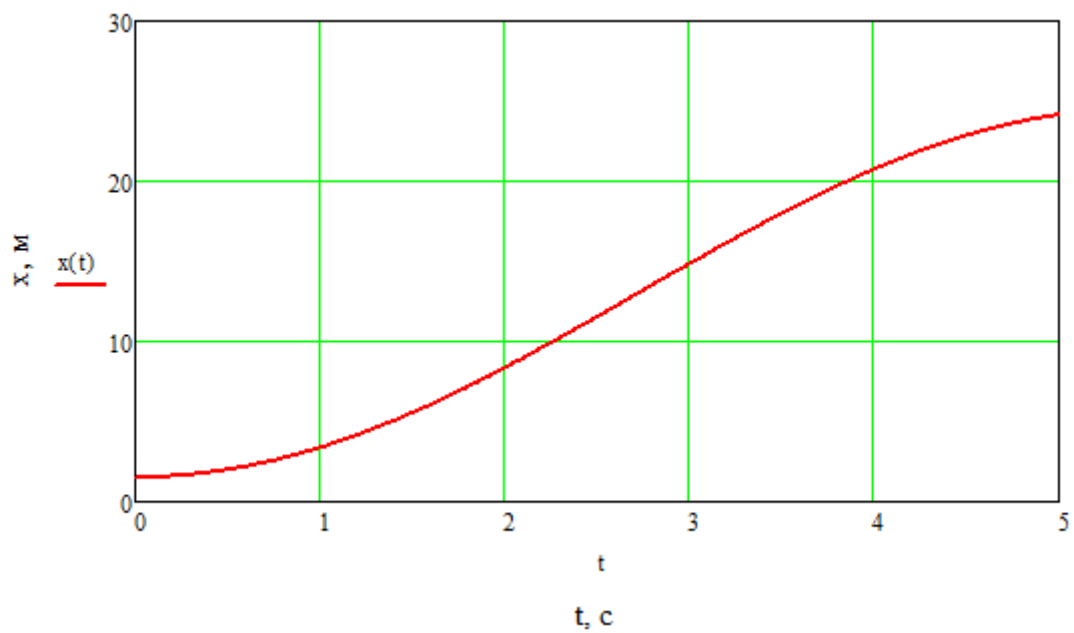


Рисунок 10 – Зависимость перемещения шарика от времени при $c=13$ Н/м.

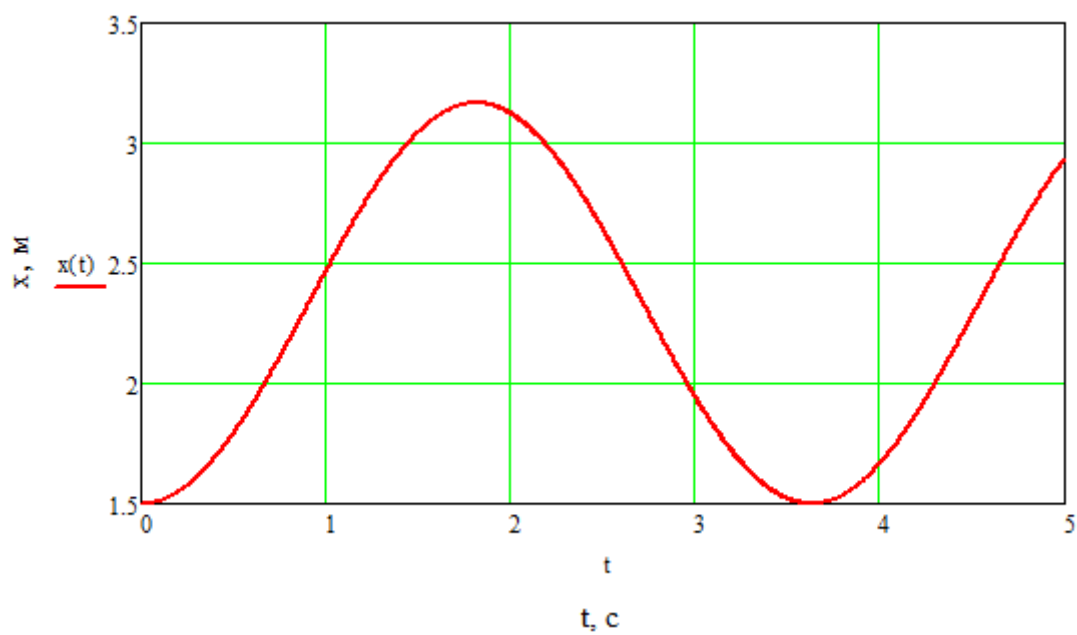


Рисунок 11 – Зависимость перемещения шарика от времени при $c=21$ Н/м.

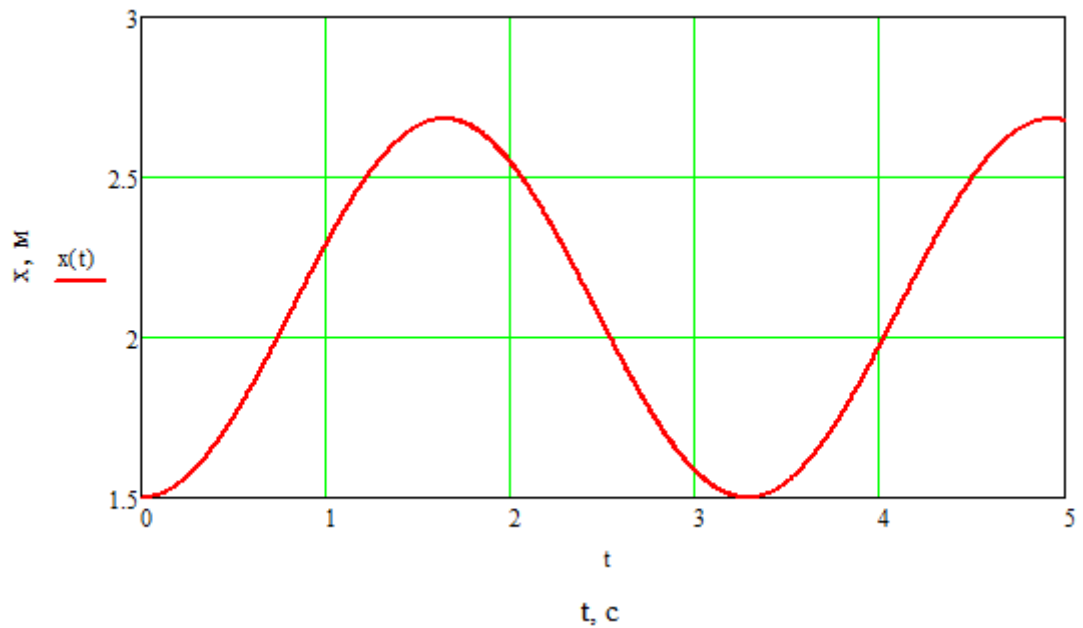


Рисунок 12 – Зависимость перемещения шарика от времени при $c=23 \text{ Н/м}$.

Составим таблицу значений найденных зависимостей (таблица 2).

Таблица 2 – Значения перемещения и скорости шарика.

$t, \text{ с}$	$x, \text{ м}$	$v, \text{ м/с}$	$N, \text{ Н}$
0	1.5	0	29.43
0.5	0.726	-0.329	29.694
1	1.485	0.652	30.452
1.5	0.757	-0.962	31.611
2	1.439	1.252	33.043
2.5	0.816	-1.517	34.607
3	1.368	1.752	36.17
3.5	0.898	-1.952	37.615
4	1.276	2.113	38.847
4.5	0.998	-2.232	39.79
5	1.171	2.305	40.391

2 ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ ТЕОРЕМ ДИНАМИКИ К АНАЛИЗУ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим механическую систему, изображённую на рисунке 13.

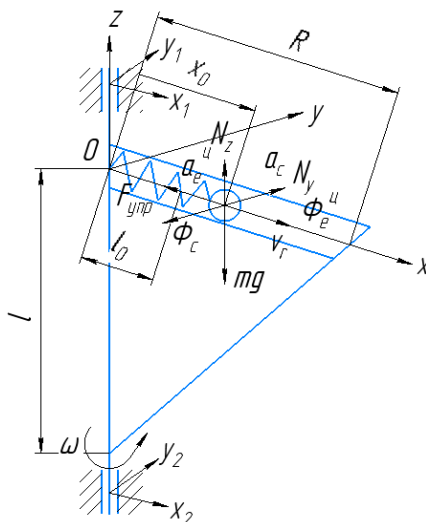


Рисунок 13 – Механическая система и действующие на неё силы.

Применим теорему об изменении кинетического момента, выбрав за ось z ось вращения:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^E ; \quad (5)$$

Определим кинетический момент рассматриваемой системы относительно оси z . Кинетический момент всей системы будет равен сумме кинетических моментов шарика и пластины:

$$K_z = K_z^{пл} + K_z^{ш} ; \quad (6)$$

$$K_z^{пл} = I_z^{пл} \cdot \omega.$$

С целью упрощения расчётов принимаем, что вся масса пластины сосредоточена в трубке (рисунок 13). Тогда используем формулу для момента инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов:

$$I_z^{пл} = \frac{MR^2}{3}. \quad (7)$$

Тогда кинетический момент стержня:

$$K_z^{пл} = \frac{M \cdot R^2}{3} \omega. \quad (8)$$

Кинетический момент шарика:

$$K_z^{ш} = m \cdot v \cdot l, \quad (9)$$

где v – абсолютная скорость шарика, l – радиус вектор, определяющий положение шарика.

Чтобы найти абсолютную скорость, спроецируем относительную скорость v_r на направление, перпендикулярное радиус-вектору, и сложим с переносной скоростью v_e :

$$v = v_r \cos \alpha + v_e,$$

где $v_e = \omega x$ – переносная скорость. Поскольку вектор относительной скорости v_r проходит через ось вращения, $\cos \alpha = 0$. Отсюда следует, что $v = v_e$.

Модуль радиус-вектора l можно определить по формуле

$$l = x.$$

Таким образом, получим по формуле (9):

$$K_z^{\text{ш}} = m\omega x^2.$$

Подставим $\omega = \dot{\phi}$:

$$K_z^{\text{ш}} = m\dot{\phi}x^2.$$

Таким образом, кинетический момент всей системы по формуле (6) равен:

$$K_z = \frac{MR^2}{3}\dot{\phi} + m\dot{\phi}x^2.$$

Тогда производная кинетического момента по времени равна

$$\frac{dK_z}{dt} = \frac{MR^2}{3}\ddot{\phi} + m\ddot{\phi}x^2 + 2m\dot{\phi}\dot{x}x. \quad (7)$$

Определим главный момент всех внешних сил относительно выбранной оси. Силы тяжести пластины Mg и шарика mg параллельны оси вращения, поэтому они моментов не создают:

$$M_z^{mg} = 0;$$

$$M_z^{Mg} = 0;$$

Составим дифференциальное уравнение движения твёрдого тела:

$$\frac{MR^2}{3}\ddot{\phi} + m\ddot{\phi}x^2 + 2m\dot{\phi}\dot{x}x = 0. \quad (8)$$

Реакции опор \bar{X}_0, \bar{Y}_0 пересекают ось вращения и момент этих сил относительно оси z равен нулю. Силы динамического взаимодействия между шариком и пластиной, включая силу упругости пружины $F_{\text{упр}}$ есть силы внутренние. Поэтому

$$\frac{MR^2}{3}\ddot{\phi} + m\ddot{\phi}x^2 + 2m\dot{\phi}\dot{x}x = M_{\text{вп}}.$$

где $M_{\text{вп}}$ – внешний момент, обеспечивающий равномерное вращение пластины.

Откуда следует, что искомый внешний момент, обеспечивающий равномерное вращение пластины, должен быть равен:

$$M_{\text{вп}} = 2m\omega\dot{x}x.$$

На рисунке 14 представлен график зависимости внешнего момента, обеспечивающего равномерное вращение пластины от времени.

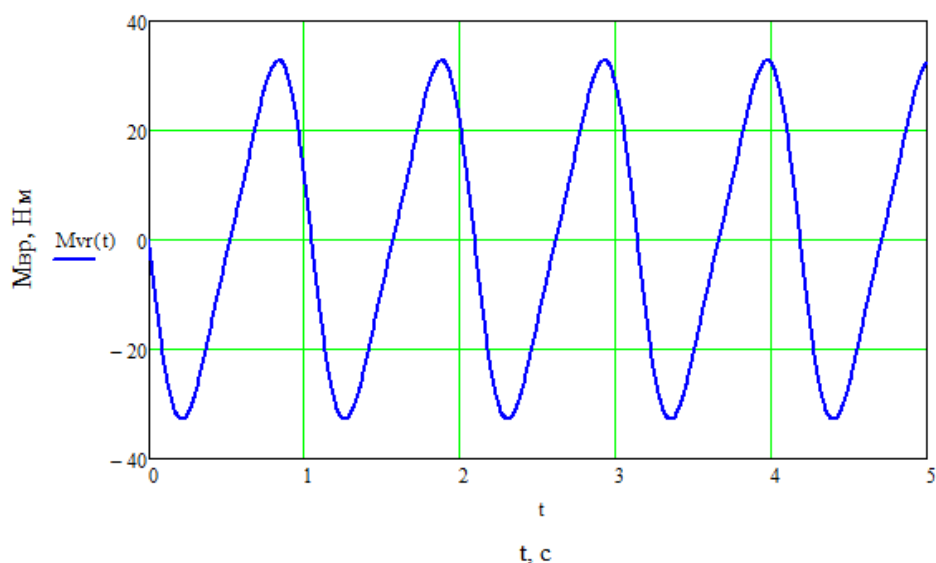


Рисунок 14 – График зависимости внешнего момента от времени.

Выполним проверку по теореме об изменении кинетической энергии. Найдём полную энергию E системы:

$$E = T + \Pi,$$

где T – кинетическая, Π – потенциальная энергия.

Кинетическая энергия T определяется по формуле:

$$T = T^{\text{пл}} + T^{\text{ш}},$$

где $T^{\text{пл}}$ – кинетическая энергия пластины, $T^{\text{ш}}$ – кинетическая энергия шарика.

Найдём кинетическую энергию пластины:

$$T^{\text{пл}} = \frac{1}{2} \cdot I_z^{\text{пл}} \cdot \omega^2.$$

Найдём кинетическую энергию шарика:

$$T^{\text{ш}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_a^2.$$

Абсолютная скорость шарика V_a равна геометрической сумме относительной V_r и переносной V_e скоростей:

$$V_a^2 = V_e^2 + V_r^2,$$

где $V_e = \omega x$; $V_r = \dot{x}$.

Тогда кинетическая энергия шарика равна

$$T^{\text{ш}} = \frac{1}{2} m (\omega^2 x^2 + (\dot{x})^2).$$

Подставим найденные выражения энергии в формулу

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{MR^2}{3}\right) \omega^2 + \frac{1}{2} m((\dot{x})^2 + \omega^2 x^2).$$

Потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \Pi^{\text{пл}} + \Pi^{\text{ш}} + \Pi^{\text{пр}},$$

где потенциальная энергия сил тяжести пластины $\Pi^{\text{пл}}$, шарика $\Pi^{\text{ш}}$, а также сила упругости пружины $\Pi^{\text{пр}}$, определяются следующими формулами:

$$\Pi^{\text{пр}} = \frac{c}{2} (x - l_0)^2;$$

$$\Pi^{\text{ш}} = 0;$$

$$\Pi^c = 0.$$

Подставив в формулу, получим

$$\Pi = \frac{c}{2} (x - l_0)^2.$$

Полная энергия соответственно равна

$$E = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{MR^2}{3}\right) \omega^2 + \frac{1}{2} m((\dot{x})^2 + \omega^2 x^2) + \frac{c}{2} (x - l_0)^2.$$

Работа двигателя равна

$$A_{\text{впр}} = M_{\text{впр}} \omega t.$$

Построим график изменения полной энергии и разности полной энергии на рисунке 15.

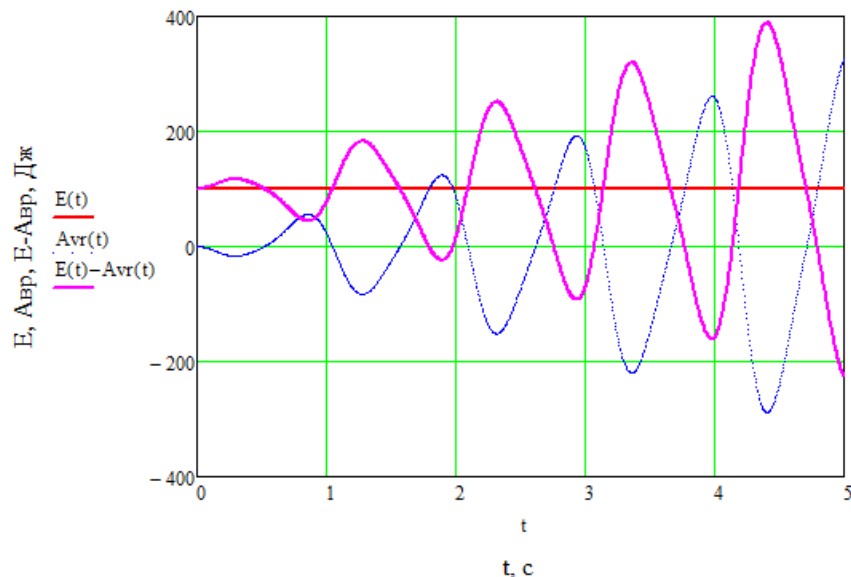


Рисунок 15 – Проверка по теореме об изменении кинетической энергии.

3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ В ОПОРАХ ВРАЦАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА

Вспользуемся методом кинестатики для определения реакций в опорах вращающегося тела (рисунок 16).

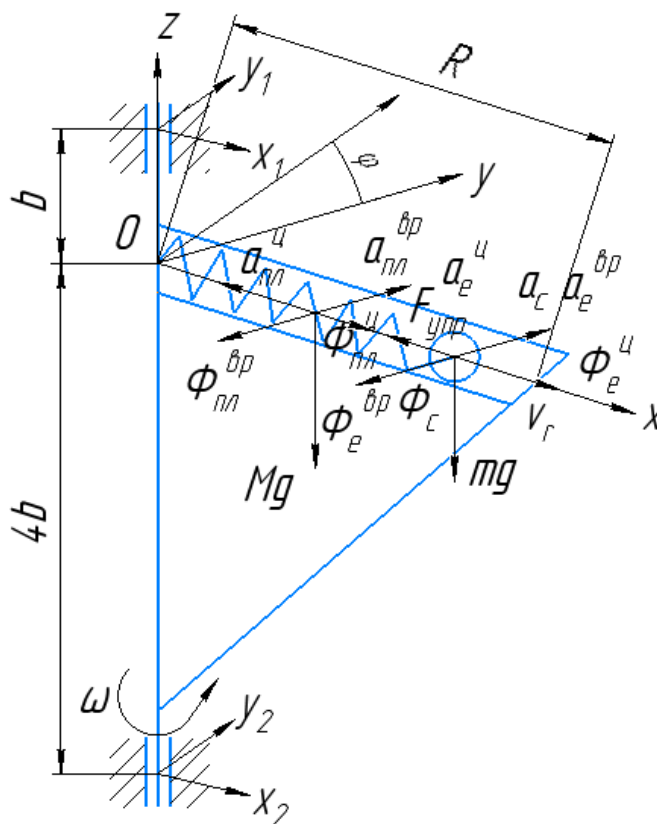


Рисунок 16 – Определение реакций в подвижной системе координат.

Запишем уравнения кинестатики в векторной форме:

$$\overline{F}^e + \overline{R}^e + \overline{\Phi} = 0;$$

$$\overline{M}_{\overline{F}^e} + \overline{M}_{\overline{R}^e} + \overline{M}_{\overline{\Phi}} = 0,$$

где $\overline{F}^e, \overline{R}^e, \overline{\Phi}$ – главные векторы активных сил, реакции связей и сил инерции соответственно. $\overline{M}_{\overline{F}^e}$ – главный момент активных сил, $\overline{M}_{\overline{R}^e}$ – главный момент реакции связей, $\overline{M}_{\overline{\Phi}}$ – главный момент сил инерции.

Так в нашем случае $\omega = const$, то главный вектор сил инерции определяется по формуле

$$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_{пл} + \overline{\Phi}_1,$$

где $\overline{\Phi}_{пл} = \overline{\Phi}_{пл}^ц + \overline{\Phi}_{пл}^{вр}$ – главный вектор сил инерции, действующих на пластину; $\overline{\Phi}_{пл}^ц$ – центробежная сила инерции, $\overline{\Phi}_{пл}^{вр}$ – вращательная сила инерции.

$\overline{\Phi}_1 = \overline{\Phi}_r + \overline{\Phi}_c + \overline{\Phi}_e$, – главный вектор сил инерции, действующих на шарик; $\overline{\Phi}_r$ – относительная сила инерции, $\overline{\Phi}_c$ – кориолисова сила инерции, $\overline{\Phi}_e = \overline{\Phi}_e^ц + \overline{\Phi}_e^{вр}$ –

переносная сила инерции; Φ_e^H – центробежная составляющая, Φ_e^{BP} – вращательная составляющая.

Относительная сила инерции:

$$\Phi_r = ma_r,$$

где $a_r = \ddot{x}$ – относительное ускорение шарика.

Кориолисова, центробежная и вращательная силы инерции:

$$\Phi_c = m \cdot a_c;$$

$$\Phi_e^H = m \cdot a_e^H;$$

$$\Phi_e^{BP} = m \cdot a_e^{BP};$$

где $a_c = 2 \cdot \omega \cdot V_r = 2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{x}$; – кориолисово ускорение, $a_e^H = \omega^2 x = \dot{\varphi}^2 x$; – центробежное ускорение, $a_e^{BP} = \varepsilon x = \ddot{\varphi} x$ – вращательное ускорение.

Центробежная и вращательная силы инерции пластины:

$$\Phi_{пл}^H = M \cdot a_{пл}^H; \quad \Phi_{пл}^{BP} = M \cdot a_{пл}^{BP},$$

где $a_{пл}^H = \omega^2 \cdot \frac{R}{2} = \dot{\varphi}^2 \frac{R}{2}$ – центробежное ускорение, $a_{пл}^{BP} = \varepsilon \cdot \frac{R}{2} = \ddot{\varphi} \frac{R}{2}$ – вращательное ускорение.

Силы тяжести пластины и шарика соответственно:

$$F_1 = Mg, \quad F_2 = mg.$$

Спроецируем полученные силы на неподвижные оси координат OX_0Y_0Z :

$$\begin{aligned} \sum X_0 &= X_0 + \Phi_r \cos(\varphi) + \Phi_e^H \cos(\varphi) + \Phi_{пл}^H \cos(\varphi) - \\ &\quad - \Phi_c \sin(\varphi) - \Phi_{пл}^{BP} \sin(\varphi) - \Phi_e^{BP} \sin(\varphi) = 0; \\ \sum Y_0 &= Y_0 + \Phi_r \sin(\varphi) + \Phi_e^H \sin(\varphi) + \Phi_{пл}^H \sin(\varphi) - \\ &\quad - \Phi_c \cos(\varphi) - \Phi_{пл}^{BP} \cos(\varphi) - \Phi_e^{BP} \cos(\varphi) = 0; \\ \sum Z_1 &= Mg + mg. \end{aligned} \quad (9)$$

Из первого уравнения системы (9) найдем составляющие реакции в опорах OX_1 и OX_2 :

$$X_0 = -\Phi_r \cos(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \cos(\varphi) - \Phi_{пл}^H \cos(\varphi) + \Phi_c \sin(\varphi) + \Phi_{пл}^{BP} \sin(\varphi) + \Phi_e^{BP} \sin(\varphi);$$

$$X_0 = m\ddot{x} \cos(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \cos(\varphi) - M\dot{\varphi}^2 \frac{R}{2} \cos(\varphi) + 2m\dot{\varphi}\dot{x} \sin(\varphi) + M\ddot{\varphi} \frac{R}{2} \sin(\varphi) + m\ddot{\varphi} x \sin(\varphi);$$

$$X_0 = X_1 + X_2 = 4X_2 + X_2 \text{ (так как их плечи равны соответственно } b \text{ и } 4b);$$

$$X_2 = \frac{1}{5} \left(m\ddot{x} \cos(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \cos(\varphi) - M\dot{\varphi}^2 \frac{R}{2} \cos(\varphi) + 2m\dot{\varphi}\dot{x} \sin(\varphi) + M\ddot{\varphi} \frac{R}{2} \sin(\varphi) + m\ddot{\varphi} x \sin(\varphi) \right);$$

$$X_1 = \frac{4}{5} \left(m\ddot{x} \cos(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \cos(\varphi) - M\dot{\varphi}^2 \frac{R}{2} \cos(\varphi) + 2m\dot{\varphi}\dot{x} \sin(\varphi) + M\ddot{\varphi} \frac{R}{2} \sin(\varphi) + m\ddot{\varphi} x \sin(\varphi) \right).$$

Из второго уравнения системы (9) найдём составляющую реакции в опорах OY_1 и OY_2 :

$$Y_0 = -\Phi_r \sin(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \sin(\varphi) - \Phi_{пл}^H \sin(\varphi) + \Phi_c \cos(\varphi) + \Phi_{пл}^{BP} \cos(\varphi) + \Phi_e^{BP} \cos(\varphi);$$

$$Y_0 = m\ddot{x} \sin(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \sin(\varphi) - M\dot{\varphi}^2 \frac{R}{2} \sin(\varphi) + 2m\dot{\varphi}\dot{x} \cos(\varphi) + M\ddot{\varphi} \frac{R}{2} \cos(\varphi) + m\dot{\varphi}x \cos(\varphi);$$

$$Y_0 = Y_1 + Y_2 = 4Y_2 + Y_2 \text{ (так как их плечи равны соответственно } b \text{ и } 4b);$$

$$Y_2 = \frac{1}{5} \left(m\ddot{x} \sin(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \sin(\varphi) - M\dot{\varphi}^2 \frac{R}{2} \sin(\varphi) + 2m\dot{\varphi}\dot{x} \cos(\varphi) + M\ddot{\varphi} \frac{R}{2} \cos(\varphi) + m\dot{\varphi}x \cos(\varphi) \right);$$

$$Y_1 = \frac{4}{5} \left(m\ddot{x} \sin(\varphi) - m\dot{\varphi}^2 x \sin(\varphi) - M\dot{\varphi}^2 \frac{R}{2} \sin(\varphi) + 2m\dot{\varphi}\dot{x} \cos(\varphi) + M\ddot{\varphi} \frac{R}{2} \cos(\varphi) + m\dot{\varphi}x \cos(\varphi) \right).$$

Изобразим зависимости полученных реакций опор на рисунке 17.

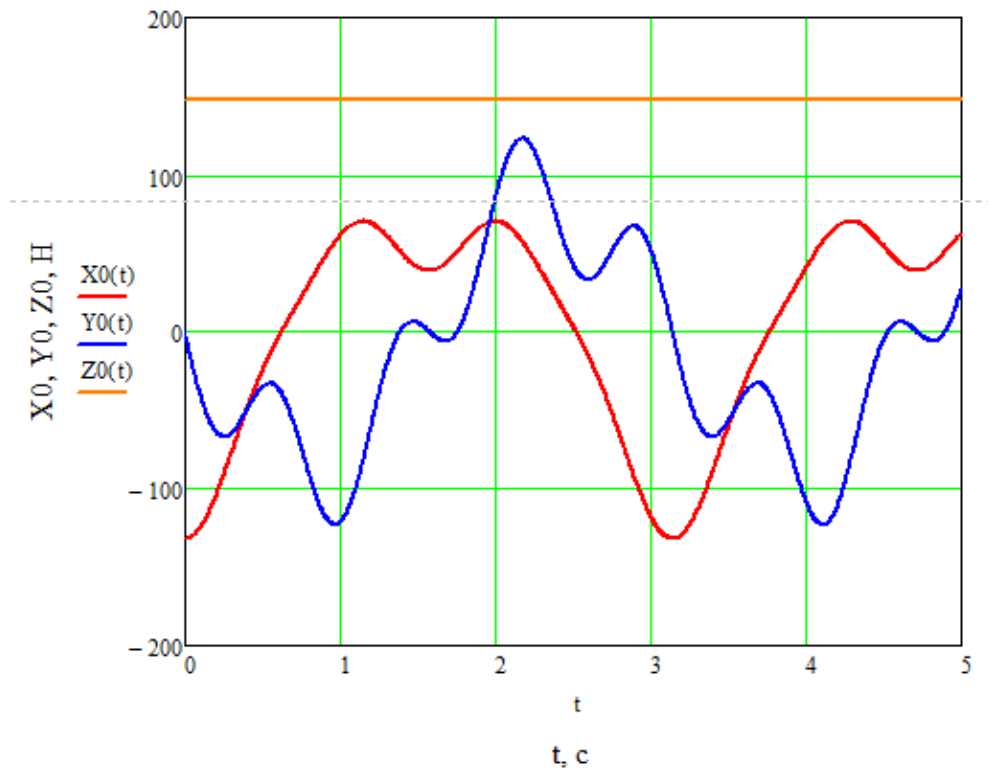


Рисунок 17 – Зависимость реакции опор от времени.

4 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Движение системы, изображённой на рисунке 18, начинается из заданного начального кинематического состояния и длится до момента времени t_1 . Задано уравнение движения тела. Неконсервативные движущие силы отсутствуют.

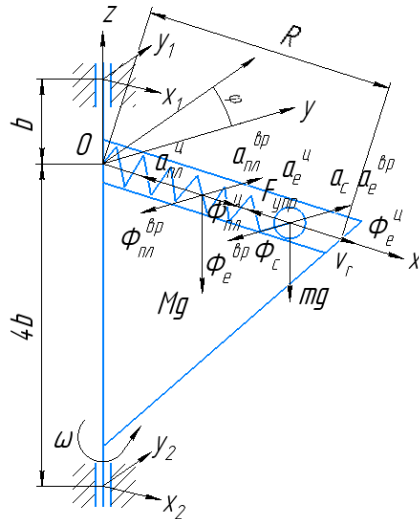


Рисунок 18 – Активные силы в системе.

Данная материальная система имеет две степени свободы. Действительно, для определения положения пластины и шарика надо задать два независимых параметра. В качестве обобщенных координат выбираем угол поворота стержня φ и координату x , определяющую положение материальной точки.

$$q_1 = \varphi, \quad \dot{q}_1 = \dot{\varphi};$$

$$q_2 = x, \quad \dot{q}_2 = \dot{x}.$$

где \dot{q}_1 – относительная скорость движения шарика.

Уравнения Лагранжа II рода имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} &= Q_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Найдём кинетическую энергию системы. Она состоит из кинетических энергий всех тел, входящих в систему: пластины $T^{\text{пл}}$ и шарика $T^{\text{ш}}$

$$T = T^{\text{пл}} + T^{\text{ш}};$$

$$T^{\text{пл}} = \frac{1}{2} \cdot I_{z_1}^{\text{пл}} \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Момент инерции пластины $I_z^{\text{пл}}$ был найден ранее по формуле (7)

$$I_z^{\text{пл}} = \frac{MR^2}{3};$$

$$T^{\text{ш}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_a^2.$$

Абсолютная скорость шарика V_a равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей, её величина определяется по формуле:

$$V_a^2 = V_e^2 + V_r^2,$$

где V_r и V_e – относительная и переносная скорости шарика.

Тогда для кинетической энергии получим:

$$T^{\text{ш}} = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\varphi}^2 x^2 + (\dot{x})^2). \quad (11)$$

Найдём частные производные от кинетической энергии, входящие в уравнения Лагранжа:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x};$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{\varphi}^2 x;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{MR^2}{3} \dot{\varphi} + m_2 \dot{\varphi} x^2;$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{MR^2}{3} \ddot{\varphi} + m_2 \ddot{\varphi} x^2 + 2m_2 \dot{\varphi} \dot{x} x;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Найдём обобщенные силы двумя способами.

Так как в системе (рисунок 19) действуют только консервативные силы, то можно найти обобщенные силы через потенциальную энергию

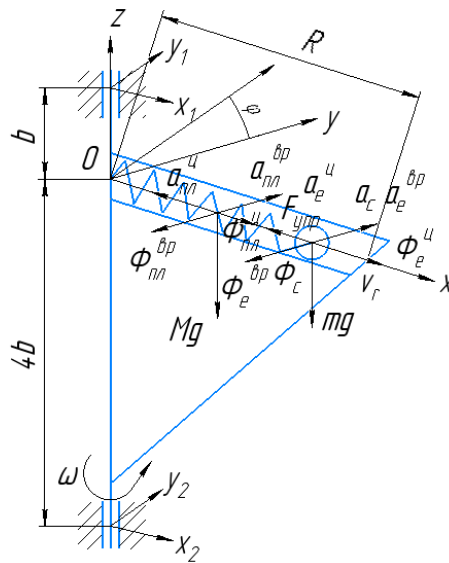


Рисунок 19 – Определение потенциальной энергии.

$$P = P^{\text{пл}} + P^{\text{ш}} + P^{\text{пр}},$$

где $P^{\text{пл}}, P^{\text{ш}}, P^{\text{пр}}$ - потенциальная энергия сил тяжести пластины, шарика, а также силы упругости пружин, которые определяются следующими формулами:

$$P^{\text{пр}} = \frac{c}{2}(x - l_0)^2;$$

$$P^{\text{ш}} = 0;$$

$$P^{\text{пл}} = 0.$$

Тогда потенциальная энергия системы примет вид:

$$P = \frac{c}{2}(x - l_0)^2. \quad (12)$$

Найдём обобщённые силы:

$$Q_x = -\frac{\partial P}{\partial x} = -c(x - l_0);$$

$$Q_\varphi = -\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0.$$

Повторим поиск обобщённых сил через работу.

Для определения обобщённой координаты x , рассмотрим такое виртуальное перемещение, при котором будут изменяться только данная координата.

$$\delta x \neq 0, \quad \delta \varphi = 0.$$

Найдём элементарную работу:

$$\delta A_x = -c \cdot (x - l_0) \delta x;$$

$$Q_x = \frac{\delta A_x}{\delta x} = -c(x - l_0).$$

Также для определения обобщённой координаты φ , рассмотрим такое виртуальное перемещение, при котором будет изменяться только данный угол.

$$\delta x = 0, \quad \delta \varphi \neq 0.$$

При вращательном движении виртуальная работа будет определяться моментом сил и виртуальным углом поворота.

$$\delta A_\varphi = 0;$$

$$Q_\varphi = \frac{\delta A_\varphi}{\delta \varphi} = 0.$$

Составим уравнение движения, соответствующее координате x . Для этого понадобятся вычисления $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right), \frac{\partial T}{\partial x}$, найденные ранее. В результате можем составить дифференциальное уравнение движения:

$$m\ddot{x} - m\dot{\varphi}^2 x = -c(x - l_0).$$

В случае равномерного движения, оно будет полностью совпадать с уравнением относительного движения (3).

Составим уравнение движения, соответствующее координате φ . Для этого понадобятся вычисления $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right)$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$, найденные ранее. Получим дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{MR^2}{3} \ddot{\varphi} + m\dot{\varphi}x^2 + 2m\dot{\varphi}\dot{x}x = 0.$$

Данное уравнение совпадает с уравнением (8). Проинтегрируем численно полученную систему уравнений при помощи Mathcad.

Графики зависимостей координат x , φ , скоростей \dot{x} , $\dot{\varphi}$ от времени t представлены на рисунках 20 – 23. Проведём проверку правильности интегрирования уравнений Лагранжа и построим график зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии системы от времени на рисунке 24.

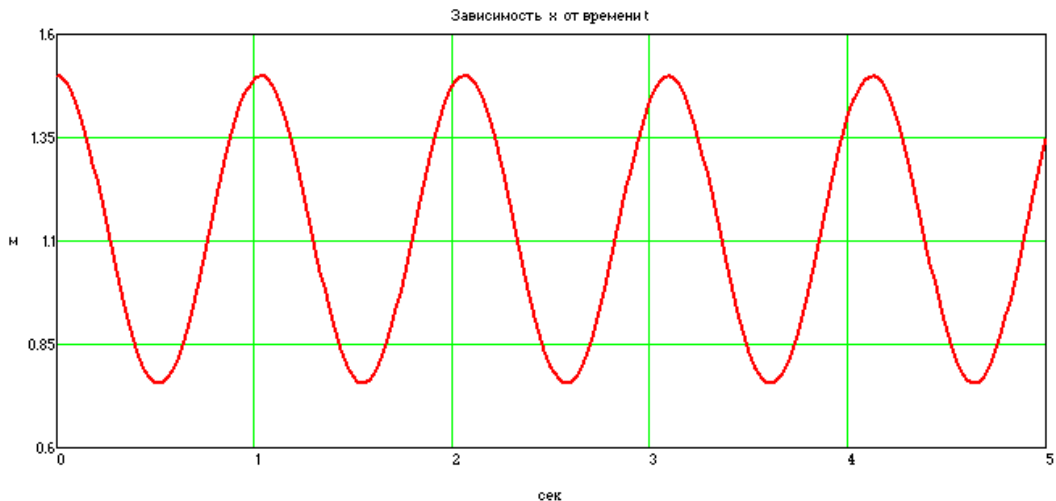


Рисунок 20 – Зависимость координаты x от времени t .

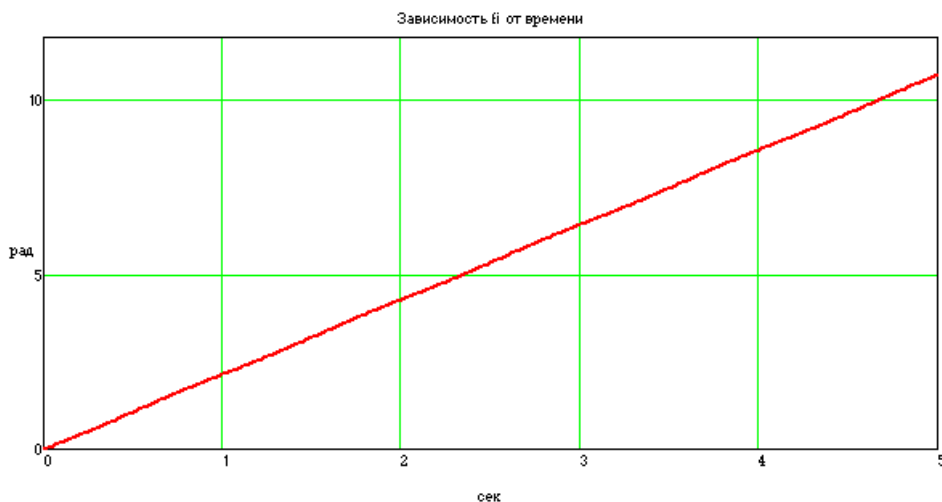


Рисунок 21 – Зависимость координаты φ от времени t .

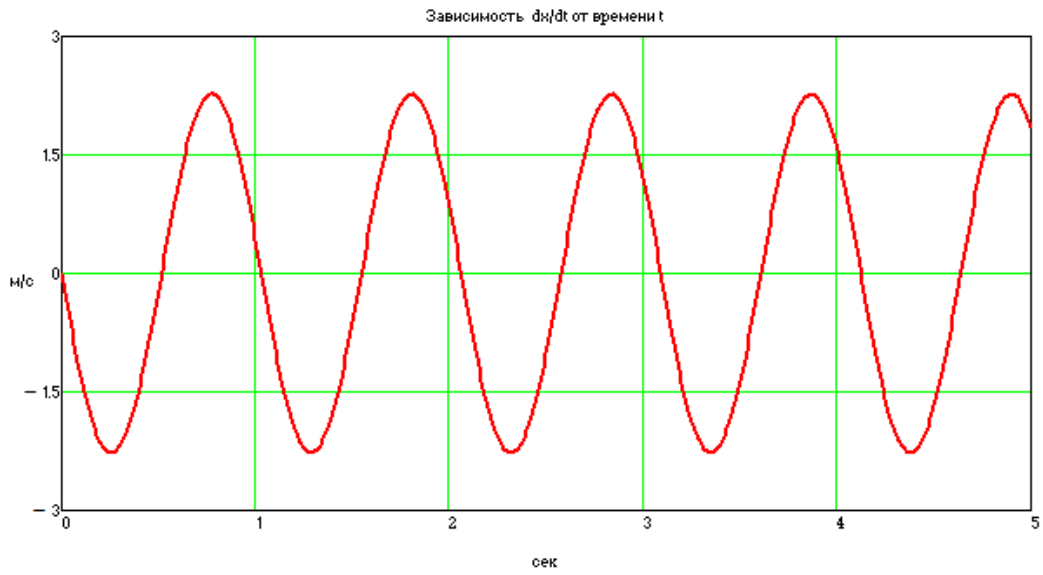


Рисунок 22 – Зависимость скорости \dot{x} от времени t .

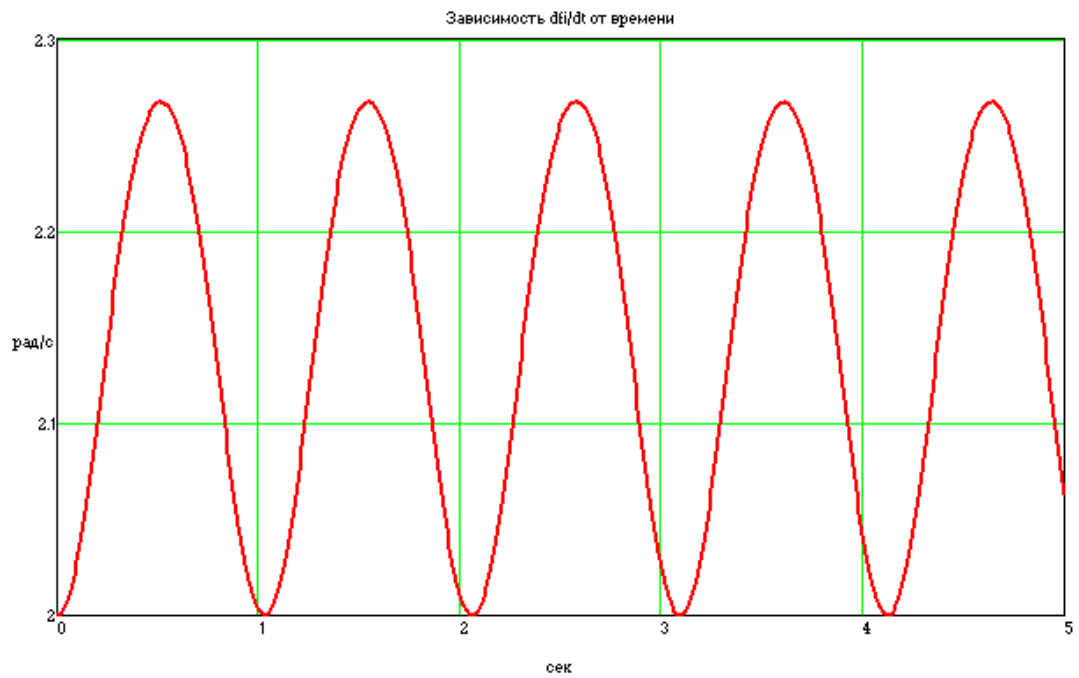


Рисунок 23 – Зависимость скорости $\dot{\phi}$ от времени t .

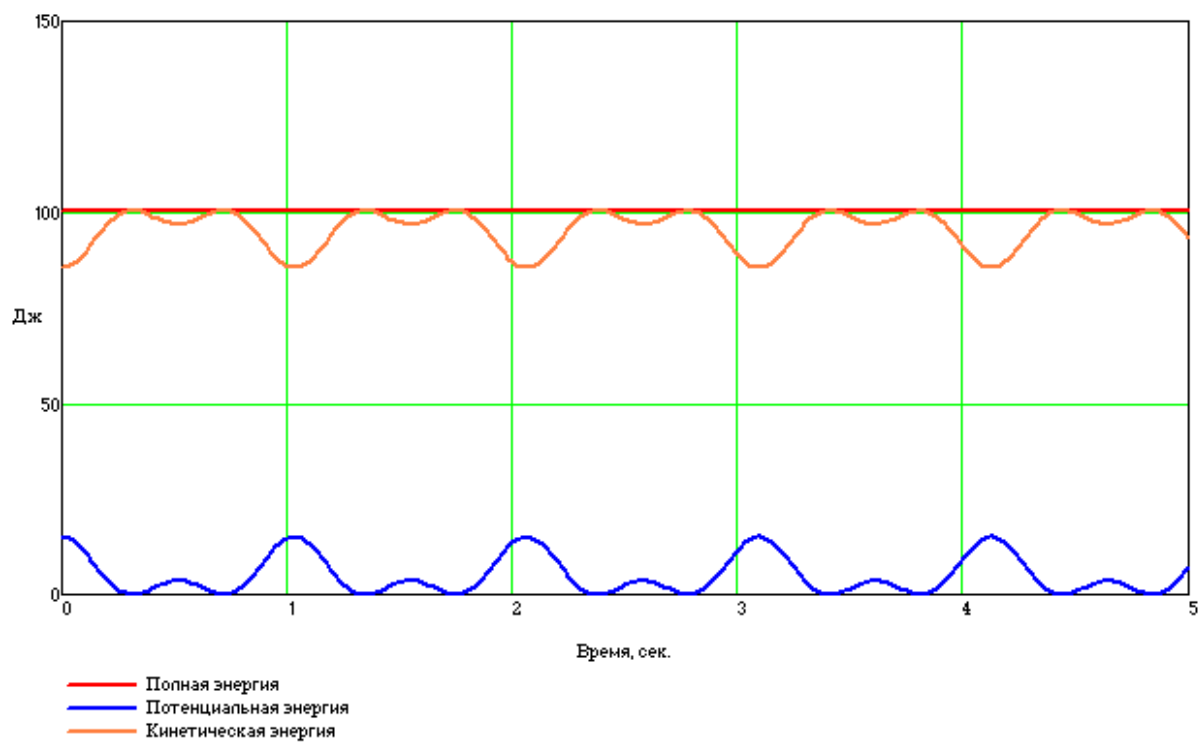


Рисунок 24 – Зависимость кинетической, потенциальной и полной энергии от времени.

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Согласно принципу возможных перемещений (основном уравнению статики), для того чтобы механическая система, на которую наложены идеальные, стационарные, удерживающие и голономные связи, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы в этой системе были равны нулю все обобщенные силы.

Перевернём систему на 90 градусов и составим уравнения Лагранжа. Потенциальная энергия пластины, шарика и пружины примут вид:

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{пр}} &= \frac{c}{2}(x - l_0)^2; \\ \Pi^{\text{ш}} &= -mgx; \\ \Pi^{\text{пл}} &= \frac{MgR}{2}(1 - \sin \varphi). \end{aligned}$$

Тогда потенциальная энергия системы примет вид:

$$\Pi = \frac{c}{2}(x - l_0)^2 - mgx + \frac{MgR}{2}(1 - \sin \varphi).$$

Найдём обобщённые силы:

$$\begin{aligned} Q_x &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(x - l_0) + mg; \\ Q_\varphi &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{MgR}{2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - m\dot{\varphi}^2 x &= -c(x - l_0) + mg; \\ \frac{MR^2}{3}\ddot{\varphi} + m\dot{\varphi}x^2 + 2m\dot{\varphi}\dot{x}x &= \frac{MgR}{2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Найдём возможные положения равновесия перевернутой системы:

$$\begin{cases} Q_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = -c(x - l_0) + mg = 0; \\ Q_\varphi = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{MgR}{2} \cos \varphi = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 149,43 - 120x = 0; \\ 176,58 \cos \varphi = 0; \end{cases}$$

Решив данную систему уравнений численным методом, получим единственное возможное положение равновесия:

$$\begin{aligned} \varphi &= 1,571 \text{ рад}, \quad x = 1,245 \text{ м}; \\ C_{11} &= \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} \right)_0; \quad C_{12} = C_{21} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial \varphi} \right)_0; \quad C_{22} = \left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} \right)_0. \end{aligned}$$

Для оценки устойчивости полученных положений равновесия найдём все вторые производные от потенциальной энергии по обобщенным координатам и по ним определим обобщённые коэффициенты жесткости.

$$C_{11} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Pi_1 = 120;$$

$$C_{12} = C_{21} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \Pi_1 = 0;$$

$$C_{22} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Pi_1 = 176,58.$$

Воспользуемся критерием Сильвестра:

Квадратичная форма будет положительно определённой, если определитель, составленный из её коэффициентов, и все его главные диагональные миноры будут положительными, т.е. если коэффициенты C_{ij} будут удовлетворять условиям:

$$\Delta_1 = C_{11} > 0, \quad \Delta_2 = C_{11} \cdot C_{22} - C_{12} \cdot C_{21} > 0.$$

Условия критерия Сильвестра:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_1 = 120 > 0 \\ \Delta_2 = 120 \cdot 176,58 = 21190 > 0 \end{array} \right\}$$

Отсюда следует, что положение равновесия является устойчивым.

6 ИССЛЕДОВАНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для устойчивого положения равновесия $\varphi = 1,571$ рад, $x = 1,245$ м запишем уравнения малых колебаний. Кинетическая энергия была найдена ранее по формуле (11):

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\varphi}^2 x^2 + (\dot{x})^2).$$

Разложим выражение для кинетической энергии в ряд Тейлора:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{MR^2}{3} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{\varphi}^2 x^2 + (\dot{x})^2) = \frac{1}{2} a_{11} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} a_{22} (\dot{x})^2 + \frac{1}{2} (a_{12} + a_{21}) \dot{x} \dot{\varphi}.$$

Тогда

$$a_{11} = \frac{MR^2}{3};$$

$$a_{22} = m;$$

$$a_{12} = a_{21} = 0.$$

Для малых колебаний принимаем, что $\cos \varphi = 1$, $\sin \varphi = 0$. Потенциальная энергия была найдена ранее по формуле (12):

$$П = \frac{c}{2} (x - l_0)^2 - mgx + \frac{MgR}{2} (1 - \sin \varphi) = \frac{1}{2} c_{11} \varphi^2 + \frac{1}{2} c_{22} x^2 + \frac{1}{2} (c_{12} + c_{21}) x \varphi;$$

$$c_{11} = 0;$$

$$c_{22} = c;$$

$$c_{12} = c_{21} = 0.$$

Запишем дифференциальные уравнения малых колебаний системы:

$$a_{11} \ddot{\varphi} + c_{11} \varphi + a_{12} \ddot{x} + c_{12} x = 0;$$

$$a_{21} \ddot{\varphi} + c_{21} \varphi + a_{22} \ddot{x} + c_{22} x = 0.$$

(13)

После подстановки найденных коэффициентов получим уравнения:

$$\frac{MR^2}{3} \ddot{\varphi} = 0;$$

$$m \ddot{x} + cx = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$(c_{11} - \lambda^2 a_{11})(c_{22} - \lambda^2 a_{22}) - (c_{21} - \lambda^2 a_{11})(c_{12} - \lambda^2 a_{12}) = 0.$$

После подстановки найденных коэффициентов оно примет вид:

$$-\lambda^2 \frac{MR^2}{3} (c - \lambda^2 m) = 0.$$

Частоты будут соответственно равны (с учётом того, что физический смысл принимают только положительные действительные значения) $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 6,325$.

Определим коэффициент форм колебаний по формуле:

$$k = \frac{c_{11} - \lambda^2 a_{11}}{c_{12} - \lambda^2 a_{12}}$$

Поскольку при подстановке c_{12} и a_{12} знаменатель оказывается равным нулю, то коэффициент форм колебаний не существует.

Первое уравнение системы вырождается в ноль. С учётом начальных условий $\varphi_{10} = 0,1$; $\varphi'_{10} = 0$ и $\varphi_{20} = 0,01$; $\varphi'_{20} = 0$ решим второе уравнение при помощи Mathcad и построим его график (рисунок 25).

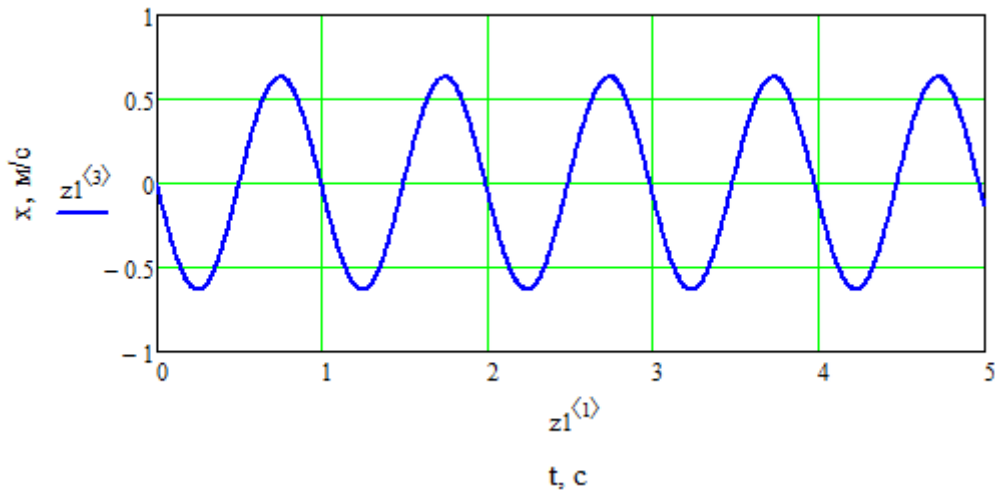


Рисунок 25 – График малых колебаний системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения курсовой работы по теоретической механике проведено исследование движения механической системы, имеющей две степени свободы. Составлены дифференциальные уравнения относительного движения шарика и движения системы без ограничений на изменение угловой скорости. Определен момент вращения, обеспечивающий постоянство угловой скорости, при помощи теоремы об изменении кинетического момента. Выполнена проверка на основании теоремы об изменении кинетической энергии.

Определены реакции опор методом кинетостатики и проведено их численное интегрирование. Составлены уравнения Лагранжа для движения системы. Выполнена проверка по закону сохранения энергии. Найдено положение равновесия механической системы. Выполнена проверка положения равновесия на устойчивость по критерию Сильвестра. Исследованы малые колебания для устойчивого положения системы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Авраменко, А. А. Динамика точки и механической системы; Учебное пособие для курсового проектирования/А. А. Авраменко, В. В. Архипов, В.С. Асланов, И. А. Тимбай; Под ред. В. С. Асланова. – Самара: СГАУ – 2001. – 84 с.
- 2 Яблонский, А. А. Курс теоретической механики/А. А. Яблонский, В.М. Никифорова – М.: Интеграл-Пресс. – 608 с.